ÉCOLE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS DE MARSEILLE

Mai 1974

CONCOURS D'ADMISSION

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, θ désigne le réel $\sqrt[3]{3}$, $\mathfrak{M}$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre trois à coefficients complexes et I l'élément unité de $\mathfrak{M}$. j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $2\pi/3$.

Pour $a, b, c \in \mathbf{C}$ (corps des nombres complexes) on pose :

$$\mathrm{M}(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & 3c & 3b \\ b & a & 3c \\ c & b & a \end{bmatrix}.$$

Soit $\mathcal{E} = \{ \mathrm{M}(a,b,c) \mid a, b, c \in \mathbf{C} \}$.

I

1° *a*. Montrer que l'application de $\mathbf{C}^3$ dans $\mathfrak{M}$ qui, à (a, b, c) associe $\mathrm{M}(a, b, c)$, est linéaire et que c'est une bijection de $\mathbf{C}^3$ sur $\mathcal{E}$.

b. En déduire que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}$. Montrer que I, $\mathrm{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathrm{V} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ forment une base de $\mathcal{E}$ et que, pour tous $a, b, c \in \mathbf{C}$, on a $\mathrm{M}(a,b,c) = a\mathrm{I} + b\mathrm{U} + c\mathrm{V}$.

2° *a*. Combien valent U^2, U^3 ? Exprimer U^n suivant les valeurs de l'entier naturel n.

b. Montrer que le produit matriciel $\mathrm{M}(a,b,c) \times \mathrm{M}(a',b',c')$ est de la forme $\mathrm{M}(\alpha, \beta, \gamma)$ et exprimer α, β, γ en fonction de a, b, c, a', b', c'.

c. Démontrer que $\mathcal{E}$ est un sous-anneau de $\mathfrak{M}$ et que la multiplication matricielle, restreinte à $\mathcal{E}$, est commutative.

3° *a*. Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}$. Montrer que la propriété « $\forall \mathrm{M} \in \mathcal{E}$, $\mathrm{AM} = \mathrm{MA}$ » équivaut à « $\mathrm{AU} = \mathrm{UA}$ ».

b. Montrer que $\mathrm{AU} = \mathrm{UA}$ si, et seulement si, $\mathrm{A} \in \mathcal{E}$.

4° *a*. Calculer le déterminant $det(\mathrm{M}(a,b,c))$ et démontrer qu'il est égal au produit $(a + b\theta + c\theta^2)(a + jb\theta + j^2c\theta^2)(a + j^2b\theta + jc\theta^2)$.

b. Démontrer que, lorsque a, b, c sont des nombres *rationnels* non tous nuls, $\mathrm{M}(a,b,c)$ est inversible (on pourra se ramener au cas où a, b, c sont des entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble).

5° *a*. Calculer $\mathrm{M}(a,b,c) \times \mathrm{M}(a, jb, j^2c) \times \mathrm{M}(a, j^2b, jc)$;

b. En déduire, lorsqu'il existe, l'inverse de $\mathrm{M}(a,b,c)$ et montrer qu'il appartient à $\mathcal{E}$. Soit alors $[\mathrm{M}(a,b,c)]^{-1} = \mathrm{M}(p,q,r)$; calculer p, q, r en fonction de a, b, c.

II

Dans toute cette partie, M désigne $\mathrm{M}(a,b,c)$.

1° *a*. Déterminer les valeurs propres de M (on pourra utiliser I - 4°).

b. Montrer que ces valeurs propres sont toutes distinctes si, et seulement si, $b^3 - 3c^3 \neq 0$. Établir que, si a, b, c sont *rationnels*, M est diagonalisable.

2° *a*. Montrer qu'il existe $u, v, w, h \in \mathbf{C}$ non tous nuls, tels que $u\mathrm{M}^3 + v\mathrm{M}^2 + w\mathrm{M} + h\mathrm{I} = 0$.

b. Calculer le déterminant des coordonnées, par rapport à la base $(\mathrm{I}, \mathrm{U}, \mathrm{V})$, de $(\mathrm{I}, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2)$. En déduire que les matrices $\mathrm{I}, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2$ sont linéairement indépendantes si, et seulement si, M a trois valeurs propres distinctes.

3° *a*. Montrer que les trois valeurs propres de M sont égales si, et seulement si, $b = c = 0$.

b. En déduire que le rang du « système de vecteurs » (I, M, M^2) est égal au nombre de valeurs propres distinctes de M.

c. On suppose que M est *nilpotente*, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$. Démontrer qu'alors toutes les valeurs propres de M sont nulles et en conclure que la seule matrice nilpotente de $\mathcal{E}$ est la matrice nulle.

4° *a*. Quelles sont les valeurs propres de *U*? Montrer que, si $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ est vecteur propre pour U, il l'est aussi pour M; à quelle valeur propre de M correspond-il?

b. Montrer que toutes les matrices de $\mathcal{E}$ sont diagonalisables et qu'il existe une matrice inversible $P_0 \in \mathfrak{M}$ telle que, pour *tout* $M \in \mathcal{E}$, $P_0^{-1} M P_0$ soit diagonale. Expliciter une telle matrice P_0.

5° *a*. Démontrer que $M^3 = 3I$ si, et seulement si, chaque valeur propre de M appartient à l'ensemble $\{ 0, j0, j^20 \}$. Combien l'équation « $M^3 = 3I$, $M \in \mathcal{E}$ » (*) a-t-elle de solutions? On précisera le nombre de solutions ayant une, deux, trois valeurs propres distinctes.

b. Trouver toutes les solutions de (*) ayant trois valeurs propres distinctes (on pourra remarquer que la connaissance de l'une d'elles détermine toutes les autres). Quelles sont les solutions de (*) dont toutes les valeurs propres sont égales?

c. Trouver *trois* solutions de (*) ayant deux valeurs propres distinctes et permettant — on expliquera comment — d'obtenir toutes les solutions de (*) qui ont deux valeurs propres distinctes.

d. Combien valent la somme et le produit de toutes les solutions de (*) ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail